ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ VĂN CHƯƠNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA LŨY THỪA MỘT HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC ĐẠO HÀM CỦA CHÚNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ VĂN CHƯƠNG

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA LŨY THỪA MỘT HÀM PHÂN HÌNH VỚI ĐA THỨC ĐẠO HÀM CỦA CHÚNG

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số : 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng các kết quả nêu trong luận văn, tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo tính trung thực chính xác.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Lê Văn Chương

Xác nhận
của trưởng khoa Toán

Xác nhận
của người hướng dẫn

PGS. TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới PGS. TS. Hà Trần Phương, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi quá trình học tập của mình.

Do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Lê Văn Chương

Mục lục

Mở đầu

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ta kí hiệu

$$\overline{E}_f(a) = f^{-1}(a) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = a\}$$
$$E_f(a) = \{(z, n) \in \mathbb{C} \times N : f(z) = a, \operatorname{ord}_{f-a}(z) = n\}$$

Cho f và g là hai hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và a là một giá trị phức hữu hạn hoặc ∞. Ta nói f và g chung nhau a kể cả bội (viết ngắn gọn là CM) nếu $E_f(a) = E_g(a)$. Ta nói f và g chung nhau a không kể bội (viết ngắn gọn là IM) nếu $\overline{E}_f(a) = \overline{E}_g(a)$.

Cho f là một hàm phân hình, một hàm phân hình $a(z)$ được gọi là hàm nhỏ của f nếu $T(r, a) = o(T(r, f))$. Với hàm nhỏ $a(z)$, ta nói f, g chung nhau hàm $a(z)$ CM (hoặc IM) nếu hàm $f - a$ và $g - a$ chung nhau giá trị 0 CM (IM tương ứng).

Năm 1977, Rubel và Yang đã chứng minh: Cho f là một hàm nguyên khác hằng, nếu f và f' chung nhau hai giá trị hữu hạn phân biệt a và b kể cả bội thì $f = f'$. Năm 1979, Mues và Steinmetz ([14]) đã chứng minh kết quả tương tự khi thay điều kiện CM bởi IM. Từ những công trình này của các tác giả đã nảy sinh vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình với đạo hàm của chúng.

Năm 2008, T. Zhang và W. Lü ([16]) đã xem xét vấn đề duy nhất cho lũy thừa bậc n của một hàm phân hình chung nhau một hàm nhỏ với đạo hàm cấp k của nó và thu được một số kết quả về vấn đề này. Cụ thể, các tác giả đã đưa ra một số điều kiện đại số để các hàm $f^n - a$ và $f^{(k)} - a$

và chung nhau giá trị 0 không kể bội hoặc kể cả bội thì $f^n = f^{(k)}$, trong đó $a(z)$ là một hàm nhỏ.

Kí hiệu

$$M_j(f) = (f)^{n_{0i}} \left(f^{(1)}\right)^{n_{1i}} \dots \left(f^{(k)}\right)^{n_{ki}}$$

và

$$P[f] = \sum_{j=1}^{t} M_j(f).$$

Gần đây có nhiều tác giả đã mở rộng nghiên cứu của T. Zhang và W. Lü cho các trường hợp: thay thế lũy thừa bậc n của hàm phân hình f trong kết quả T. Zhang và W. Lü của bởi đa thức bậc n của hàm đó; thay thế đạo hàm cấp k của hàm phân hình f bởi một đơn thức chứa các đạo hàm các cấp $M_j[f]$ hoặc đa thức chứa các đạo hàm $P[f]$ của hàm đó.

Mục đích chính của luận văn là giới thiệu một số nghiên cứu gần đây của T. Zhang, W. Lü, A. Banerjee, B. Chakraborty và một số tác giả khác theo hướng nghiên cứu nói trên.

Luận văn chia làm hai chương, trong Chương 1 chúng tôi trình bày một số kiến thức cần chuẩn bị, cần thiết cho các nội dung của luận văn. Chương 2 là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày một số kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình khi lũy thừa của một hàm phân hình có chung một giá trị hay hàm nhỏ với đơn thức hoặc đa thức vi phân của nó.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Lê Văn Chương

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Các hàm Nevanlinna và hai định lý cơ bản

Trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna, các hàm xấp xỉ, hàm đếm, hàm đặc trưng của một hàm phân hình được gọi là các hàm Nevanlinna, đóng một vai trò quan trọng, xuyên suốt lý thuyết. Trong phần này chúng tôi giới thiệu các hàm cơ bản này và tính chất của chúng.

1.1.1. Các hàm Nevanlinna và tính chất

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phức $\mathbb{C}$ và $r > 0$ là một số thực dương.

Định nghĩa 1.1.1. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f.

Bây giờ ta định nghĩa các hàm đếm. Kí hiệu $n(r, 1/f)$ là số không điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, 1/f)$ là số không điểm không kể bội của $f, n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |r|\}$.

Định nghĩa 1.1.2. Hàm

$$N(r,\infty;f) = N(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm). Hàm

$$\overline{N}(r,\infty;f) = \overline{N}(r,f) = \int\limits_0^r \frac{\overline{n}(t,f)-\overline{n}(0,f)}{t}dt + \overline{n}(0,f)\log r$$

được gọi là *hàm đếm không kể bội.* Trong đó

$$n(0,f) = \lim_{t\to 0} n(t,f), \quad \overline{n}(0,f) = \lim_{t\to 0} \overline{n}(t,f).$$

Định nghĩa 1.1.3. Hàm

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

gọi là *hàm đặc trưng* của hàm f.

Các hàm đặc trưng $T(r,f)$, hàm xấp xỉ $m(r,f)$ và hàm đếm $N(r,f)$ là ba hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, nó còn gọi là các hàm Nevanlinna.

Mệnh đề 1.1.4 (Một số tính chất cơ bản của các hàm Nevanlinna)**.** *Cho* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *là các hàm phân hình trên mặt phẳng phức* $\mathbb{C}$, *khi đó*

$$(1) \qquad m(r, \sum_{\nu=1}^p f_\nu) \le \sum_{\nu=1}^p m(r, f_\nu) + \log p;$$

$$(2) \qquad m(r, \prod_{\nu=1}^p f_\nu) \le \sum_{\nu=1}^p m(r, f_\nu);$$

$$(3) \qquad N(r, \sum_{\nu=1}^p f_\nu) \le \sum_{\nu=1}^p N(r, f_\nu);$$

$$(4) \qquad N(r, \prod_{\nu=1}^p f_\nu) \le \sum_{\nu=1}^p N(r, f_\nu);$$

$$(5) \qquad T(r, \sum_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu) + \log p;$$

$$(6) \qquad T(r, \prod_{\nu=1}^{p} f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{p} T(r, f_\nu).$$

1.1.2. Hai định lý cơ bản

Định lý 1.1.5 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Cho $f \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Khi đó, với mỗi $r > 0$, ta có*

(1) $T(r, f) = m\big(r, \dfrac{1}{f}\big) + N\big(r, \dfrac{1}{f}\big) + \log |c_j|$

(2) *Với mỗi số phức $a \in \mathbb{C}$,*

$$\left|T(r, f) - m\big(r, \frac{1}{f-a}\big) + N\big(r, \frac{1}{f-a}\big)\right| \leq \left|\log\left|\frac{c_1}{f-a}\right|\right| + \log^+ |a| + \log 2,$$

trong đó c_f là hệ số khác 0 nhỏ nhất trong khai triển Taylor của hàm f trong lân cận điểm $0, c_1/(f-a)$ là hệ số khác 0 nhỏ nhất trong khai triển Taylor của hàm $1/(f-a)$ trong lân cận điểm 0.

Nhận xét 1.1.6. Ta thường dùng (2) của Định lý cơ bản thứ nhất dưới dạng

$$T\big(r, \frac{1}{f-a}\big) = T(r, f) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn khi $r \to \infty$.

Cho f là một hàm phân hình, $r > 0$. Kí hiệu

$$N_{ram}(r, f) = N\Big(r, \frac{1}{f'}\Big) + 2N(r, f) - N(r, f')$$

và gọi là *hàm giá trị phân nhánh* của hàm f. Hiển nhiên $N_{ram}(r, f) \geq 0$.

Định lý 1.1.7 (Định lý cơ bản thứ hai). *Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$, $a_1, \ldots, a_q \in \mathbb{C}, (q > 2)$ là các hằng số phân biệt, khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, bất đẳng thức*

$$(q-1)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} N\Big(r, \frac{1}{f-a_j}\Big) + N(r, f) - N_{ram}(r, f) + \log T(r, f)$$